数理解析研究所講究録
325巻 1978年 196-200

Schur Index and Schur Group

都立大 理　　山田俊彦

筆者の講演では，Schur index ならびに Schur group に関して最近えられたいくつかの結果について，[1], [3], [4], [7] を中心にして述べた。そこでは [5] において与えられた p 進体上の円分多元環 (cyclotomic algebra) の index の公式が一つの中心的役割を演じている．[1], [3], [4] は既に印刷されているので，ここでは [7] で得られている結果を説明しよう．それは次の定理の精密化である．

<u>定理</u> 1 (Fein-Yamada [2]). G は有限群，χ は G の複素既約指標，$m = m_{Q}(\chi)$ は χ の有理数体 Q 上の Schur index，p は素数，そして m の p-part が $p^r > 1$ とする．そのとき p^{r+1} が G の exponent を割るか，p^r が G' (G の交換子群) の exponent を割る．さらに $p=2$ であるかまたは $p \neq 2$ で G の p-Sylow 群が abel ならば，p^{r+1} が G の exponent を割る．また p^{2r} は G の位数を割る．

さて l を素数，Q_l を l 進体，k を Q_l 上の円体，即ちある 1

の巾根ζ'が存在して $Q_\ell \supset k \supset Q_\ell$ とする．k上の cyclotomic algebra とは次のような接合積のことである：

(1) $\quad B = (\beta,\ k(\zeta)/k) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{g}} k(\zeta)u_\sigma, \quad (u_1 = 1),$

(2) $\quad u_\sigma x = \sigma(x)u_\sigma \quad (x \in k(\zeta)), \quad u_\sigma u_\tau = \beta(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}.$

ここでζは1の巾根，$\mathfrak{g}$は$k(\zeta)/k$の galois 群，βは因子団で，その値は$k(\zeta)$に含まれる1の巾根である．βは次のような積に書くことができる：

(3) $\quad \beta(\sigma,\tau) = \alpha(\sigma,\tau)\gamma(\sigma,\tau), \quad (\sigma,\tau \in \mathfrak{g}),$

$\alpha(\sigma,\tau)$はℓと素な位数の巾根，$\gamma(\sigma,\tau)$は1のℓ巾根．

さて$\ell \neq 2$としよう．$k(\zeta)/k$の inertia group を$\langle\theta\rangle$，ϕを Frobenius 置換とする．θの位数eは次のように書かれる：$e = \ell^t \cdot e'$, $e' | \ell - 1$. fをk/Q_ℓの惰性次数とすると，1の$\ell^f - 1$乗根ζ_{ℓ^f-1}はkにぞくする．

定理2 (Yamada [5]). ℓを奇素数，kをQ_ℓ上の円体，$(\beta,\ k(\zeta)/k) \sim (\alpha,\ k(\zeta)/k)\otimes_k(\gamma,\ k(\zeta)/k)$ を(1)－(3)で与えられるk上の円分多元環，

$$\delta = (\alpha(\theta,\phi)/\alpha(\phi,\theta))^{e/(\ell^f-1)}\,\alpha(\theta,\theta)\alpha(\theta^2,\theta)\cdots\alpha(\theta^{e-1},\theta)$$

とすると，$\delta = \zeta_{\ell^f-1}^{\nu}$（νはある整数）と書ける．そして円分多元環$(\beta,\ k(\zeta)/k)$の index は$e'/(\nu, e')$に等しい．

系3. 記法は定理2と同じとする．もし factor set βの

値がすべて l と素な位数の1の巾根で，かつ $e=e'$ とするならば，円分多元環 $(\beta, k(\zeta)/k)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{g}} k(\zeta)u_\sigma$ の位数は $[u_\theta, u_\phi]=u_\theta u_\phi u_\theta^{-1} u_\phi^{-1}$ の位数と $u_\theta^{l^f-1}$ の位数の最小公倍数を割り切る．

系3と Brauer-Witt の定理を用いると，l 進体 Q_l 上の Schur index に関する次の定理が得られる．

<u>定理</u> 4. G を有限群，χ を G の既約指標，l を奇素数，p を素数，χ の Q_l 上の Schur index $m_{Q_l}(\chi)$ の p-part が $p^n>1$ とする．そのとき p^{2n} は G の exponent を割るか，p^n は G' の exponent を割る．もし G の p-Sylow 群が abel なら，p^{2n} が G の exponent を割る．p^{2n} が G の exponent を割らなければ，p^{2n+1} が G の位数を割る．

次に2進体 Q_2 の場合を考察してみよう．既約指標 χ に対して $m_{Q_2}(\chi)=1$ or 2 であることはよく知られている．

<u>定理</u> 5. G を有限群，χ を G の既約指標とする．もし $m_{Q_2}(\chi)=2$ ならば 2^2 が G の exponent を割り，2が G' の exponent を割り，2^3 が G の位数を割る．

<u>注意</u>. $\mathbb{R}$ を実数体とする．G が $m_{\mathbb{R}}(\chi)=2$ なる既約指標 χ を持つ場合，必ずしも2は G' の exponent を割らないし，また 2^3 は G の位数を割るとは必ずしもいえない．その例は $G=\langle a, b\rangle$, $a^6=1$, $b^2=a^3$, $bab^{-1}=a^{-1}$ により与えられる．

さて l 進体上の Schur index に関する上記の結果と，Fein-Yamada Theorem の一部分を用いて，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Schur index に関する次の結果が得られる．

<u>定理</u> 6. G は有限群，χ は複素既約指標，$m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ の p-part は $p^n > 1$ とする．そのとき p^{2n} が G の exponent を割るか，p^n が G' の exponent を割る．G の p-Sylow 群が abel ならば，p^{2n} が G の exponent を割る．p^{2n} が G の exponent を割らなければ，p^{2n+1} が G の位数を割る．

References

[1] M. Benard, Schur indices and cyclic defect groups, Ann. of Math., 103 (1976), 283-304.

[2] B. Fein and T. Yamada, The Schur index and the order and exponent of a finite group, J. Algebra, 28 (1974), 496-498.

[3] G. J. Janusz, Generators for the Schur group of local and global number fields, Pacific J. of Math., 56 (1975), 525-546.

[4] G. J. Janusz, The Schur group of an algebraic number field, Ann. of Math., 103 (1976), 253-281.

[5] T. Yamada, Characterization of the simple compo-

nents of the group algebras over the p-adic number field, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971), 295-310.

[6] T. Yamada, The Schur Subgroup of the Brauer Group, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[7] T. Yamada, More on the Schur index and the order and exponent of a finite group, (preprint).